Université Claude Bernard Lyon 1 — Mathématiques Post-Paces

Semestre de printemps 2020-2021

Examen final (1h30)

Lundi 29 mars 2021

Préambule :
Indiquez sur la copie vos **NOM et PRÉNOM**. La justification des réponses et un soin particulier apporté à la présentation sont demandés et seront pris en compte lors de la notation.

Le sujet comporte deux questions de cours et 3 exercices indépendants.

Questions de cours. *10 minutes - 4 points*

1. (2 points) Énoncer, sans le démontrer, le théorème de Dirichlet Jordan.
2. (2 points) Énoncer, sans le démontrer, le théorème de Fubini.

Exercice 1. *50 minutes - 10 points*
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application 2π-périodique définie par $f(x) = x^2$ pour tout $x \in]-\pi, \pi]$.

1. (1 point) Faire un graphe représentant la fonction f sur l'intervalle $]-4\pi, 4\pi]$.
2. (1 point) La fonction f est-elle égale à la somme de sa série de Fourier ? Justifier la réponse.
3. (2 points)
   (a) Montrer (en détaillant tous les calculs) que la série de Fourier de f en formulation réelle s'écrit $\dfrac{\pi^2}{3} + 4\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cos(nx)}{n^2}$.
   (b) En déduire, en justifiant la réponse, que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$.
4. (2 points) Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par
$$g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cos^2(nx)}{n^2}.$$
   (a) Montrer que la série de fonctions de terme général $g_n(x) = \dfrac{(-1)^n \cos^2(nx)}{n^2}$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$.
   (b) En déduire que g est continue sur $\mathbb{R}$.
5. (2 points)

(a) Déduire de question 3. que pour tout $x \in [-\pi, \pi]$ nous avons

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cos(nx)}{n^2} = \frac{x^2}{4} - \frac{\pi^2}{12}.$$

(b) En se servant de la formule trigonométrique $\cos^2(\theta) = \dfrac{1+\cos(2\theta)}{2}$ donner une expression de $g(x)$ en fonction de $\cos(2nx)$. pour tout $x \in [-\pi, \pi]$.

(c) (BONUS) (2 points) Trouver alors une expression simple de $g(x)$ pour tout $x \in [-\pi/2, \pi/2]$ en fonction de x^2 et π^2, puis pour tout x dans $[0, \pi]$ en fonction de $(x-\pi)^2$ et π^2.

Exercice 2. *15 minutes - 3 points*

1. Énoncer, sans le démontrer le théorème de Fubini.
2. En le justifiant, calculer de deux façons l'intégrale suivante :

$$\iint_D (x+y)dA \text{ où le domaine } D \text{ est borné par } y = \sqrt{x} \text{ et } y = x^2.$$

3. Dessiner le domaine d'intégration de la question précédente.

Exercice 3. *15 minutes - 3 points*
Calculer le rayon de convergence de la série entière de terme général

$\dfrac{1-a^n}{n} x^n$, où $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}$. Discuter suivant les valeurs de a.

Théorème 1 (DIRICHLET JORDAN)

Soit f une fonction 2π-périodique continue sur $[-\pi, \pi]$ sauf éventuellement en un nombre fini de points. On suppose qu'en ces points de discontinuité, f admet une **limite à droite** et une **limite à gauche** finies. Enfin, on suppose que f admet en tout point de $[-\pi, \pi]$ une **dérivée à droite** et une **dérivée à gauche** (finies). Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série de Fourier de f est convergente en x et a pour somme $\dfrac{1}{2}\left(\lim\limits_{y \to x^+} f(y) + \lim\limits_{y \to x^-} f(y)\right)$.
En particulier, **en tout point** x **où** f **est continue**, la somme de sa série de Fourier est $f(x)$.

Théorème 4 (INTEGRATION : FUBINI)

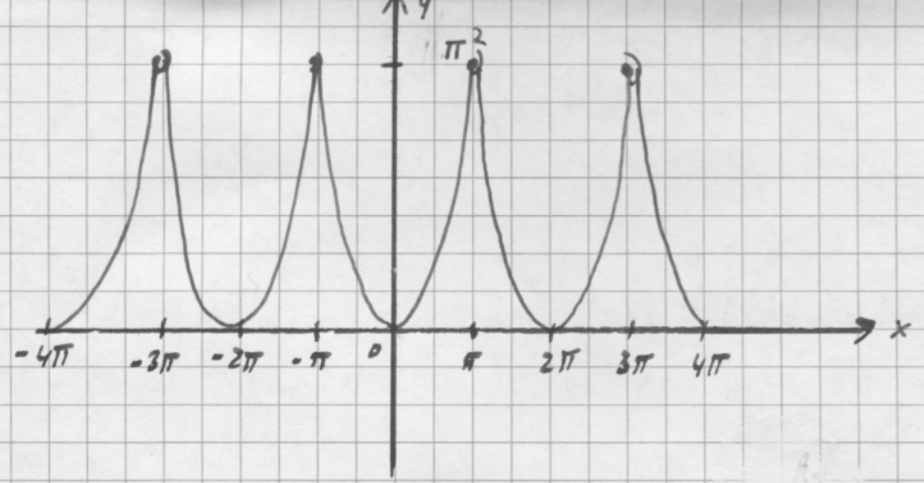
On suppose que $f : [\alpha,\beta]\times[a,b]\to\mathbb{R}$ est continue (où $[\alpha,\beta]$ et $[a,b]$ sont des segments fermés bornés de $\mathbb{R}$), alors les fonctions

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & [\alpha,\beta] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \displaystyle\int_a^b f(x,t)dt, \end{array} \qquad et \quad \begin{array}{rccc} \phi : & [a,b] & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & \displaystyle\int_\alpha^\beta f(x,t)dx, \end{array}$$

sont continues, et l'on a

$$\int_a^b\left(\int_\alpha^\beta f(x,t)dx\right)dt=\int_\alpha^\beta\left(\int_a^b f(x,t)dt\right)dx.$$

Ex 1.



2. f est paire, continue sur $\mathbb{R}$

(f est continue sur $]-\pi,\pi]$, et $\lim\limits_{x\to -\pi^+} f(x) = \lim\limits_{x \to \pi^-} f(x)$ et f est 2π-périodique.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ sauf aux points de la forme $\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Mais en ces points f admet une dérivée à droite et à gauche. Par conséquent, elle admet une dérivée à droite et à gauche partout sur $\mathbb{R}$.

D'après le théorème de Dirichlet-Jordan, sa série de Fourier converge sur $\mathbb{R}$ vers f.

3. f est paire donc $b_n = 0$ pour tout $n \geq 0$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,dx = \frac{2}{2\pi}\int_0^{\pi} x^2\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{3}$$

si $n \geq 1$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos(nx)\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\left[\frac{x^2\sin(nx)}{2}\right]_0^{\pi} - \frac{2}{n}\int_0^{\pi} x\sin(nx)\,dx\right)$$

$$= -\frac{4}{\pi n}\int_0^{\pi} x\sin(nx)\,dx \qquad \text{(le 1}^{\text{er}}\text{ terme s'annule)}$$

$$= \frac{-4}{\pi n}\left(\left[-\frac{x\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos(nx)\,dx\right).$$

$$= \frac{-4}{\pi n}\left(\frac{(-1)^{n+1}\pi}{n} + \frac{1}{n}\left[\frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^{\pi}\right)$$

$$= \frac{4(-1)^{n+2}}{n^2}$$

$$= \frac{4(-1)^n}{n^2}$$

Ainsi, la série de Fourier de f est $\dfrac{\pi^2}{3} + 4\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{\cos(nx)}{n^2}$

b. Comme la série de Fourier de f converge simplement vers f sur $\mathbb{R}$ on a, en prenant $x=0$

$$0 = f(0) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \quad \text{d'où} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$$

4. a. On a $\left| \frac{(-1)^n \cos^2(nx)}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \geq 1$.

Donc $\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \frac{(-1)^n \cos^2(nx)}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$ pour tout $n \geq 1$, et comme $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, il en résulte que la série définissant g est normalement convergente sur $\mathbb{R}$.

b. D'après la question précédente, la série définissant g est également uniformément convergente sur $\mathbb{R}$. Et comme $x \to \frac{(-1)^n \cos^2(nx)}{n^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ g sera également continue sur $\mathbb{R}$.

5. a. Nous avons vu dans 3. a. que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\cos(nx)}{n^2}$$

En particulier pour tout $x \in [-\pi, \pi]$ $\quad x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\cos(nx)}{n^2}$

Autrement dit $\quad \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\cos(nx)}{n^2} = \frac{x^2}{4} - \frac{\pi^2}{12} \quad (1)$

b. Comme $\cos^2(nx) = \frac{1+\cos(2nx)}{2}$ on a pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$g(x) = \frac{1}{2}\left[\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\cos(2nx)}{n^2}\right] = \underbrace{-\frac{\pi^2}{24}}_{\text{d'après 3.b}} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\cos(2nx)}{n^2}$$

c. BONUS

Si $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $2x \in [-\pi, \pi]$ et (1) montre que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\cos(2nx)}{n^2} = \frac{(2x)^2}{4} - \frac{\pi^2}{12} = x^2 - \frac{\pi^2}{12}$$

et donc $\quad g(x) = -\frac{\pi^2}{24} + \frac{x^2}{2} - \frac{\pi^2}{24} = \frac{x^2}{2} - \frac{\pi^2}{12} \quad (*)$

Si $x \in [0, \pi]$: si $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, d'après $(*)$ on a $g(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{\pi^2}{12}$

si $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, $-\frac{\pi}{2} \leq x - \pi \leq 0$ i.e $x - \pi \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ or $\cos(n(x-\pi)) = \pm \cos nx$

donc $\cos^2(n(x-\pi)) = \cos^2(nx)$ et $g(x) = g(x-\pi)$. D'après $(*)$ on a alors $g(x) = \frac{(x-\pi)^2}{2} - \frac{\pi^2}{2}$

Exercice 2:

1. $\dfrac{(n!)^2}{(2n+1)!}x^n$ où $x\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}$

Est de la forme $a_n x^n$ où $a_n=\dfrac{(n!)^2}{(2n+1)!}$, $a_n>0$ pour tout $n\geq 0$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{((n+1)!)^2}{(2n+3)!}\cdot\frac{(2n+1)!}{(n!)^2}=\frac{(n+1)^2}{(2n+3)\,2.(n+1)}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\frac{1}{4}$$

donc $\boxed{R=4}$

2. $\dfrac{1-a^n}{n}x^n$ est de la forme a_nx^n où $a_n=\dfrac{1-a^n}{n}$

. $\boxed{\text{Pour } a=1}$ on a $a_n=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ donc $\boxed{R=+\infty.}$

. $\boxed{\text{Pour } a=-1}$ (on ne veut pas annuler a_n pour ensuite calculer $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, donc on écarte les cas où $a_n=0$)

pour $a=-1$ on a $a_n=\dfrac{1-(-1)^n}{n}$. si $n=2k$, $k\in\mathbb{N}^*$ $a_n=0$ donc $R=+\infty$.

. si $n=2k+1$, $k\in\mathbb{N}$ $a_n=\dfrac{2}{n}$

on a alors $f_k(x)=\dfrac{2}{2k+1}x^{2k+1}$

pour tout $k\in\mathbb{N}$, pour tout $x\neq 0$ $f_k(x)\neq 0$ $(f_k(0)=0)$

$$\left|\frac{f_{k+1}(x)}{f_k(x)}\right|=\left|\frac{2}{2k+3}\cdot x^{2k+3}\cdot\frac{2k+1}{2x^{2k+1}}\right|=\frac{2k+1}{2k+3}|x^2|=\frac{2k+1}{2k+3}|x|^2\xrightarrow[k\to+\infty]{}|x|^2$$

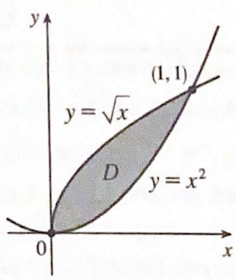
donc $\boxed{R=1}$

$\boxed{\text{pour } a\neq-1}$ $a_n=\dfrac{1-a^n}{n}\neq 0$ pour tout $n\geq 1$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\left|\frac{1-a^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{n}{1-a^n}\right|=\frac{n}{n+1}\left|\frac{1-a^{n+1}}{1-a^n}\right| \text{ or } \frac{n}{n+1}\xrightarrow[n\to\infty]{}1$$

et $\left|\dfrac{1-a^{n+1}}{1-a^n}\right|\xrightarrow[n\to+\infty]{}1$ si $|a|<1$ $\Rightarrow R=1$ si $|a|<1$

et $\left|\dfrac{1-a^{n+1}}{1-a^n}\right|=\left|\dfrac{a^n(\frac{1}{a^n}-a)}{a^n(\frac{1}{a^n}-1)}\right|=|a|\left|\dfrac{\frac{1}{a^{n+1}}-1}{\frac{1}{a^n}-1}\right|\xrightarrow[n\to\infty]{}|a|\Rightarrow R=\dfrac{1}{|a|}$ si $|a|>1$



$$\int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x+y)\,dy\,dx = \int_0^1 \left[xy + \tfrac{1}{2}y^2\right]_{y=x^2}^{y=\sqrt{x}} dx$$

$$= \int_0^1 \left(x^{3/2} + \tfrac{1}{2}x - x^3 - \tfrac{1}{2}x^4\right) dx$$

$$= \left[\tfrac{2}{5}x^{5/2} + \tfrac{1}{4}x^2 - \tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{1}{10}x^5\right]_0^1 = \tfrac{3}{10}$$